「秋田大学研究者海外派遣支援事業」帰国報告書

平成２２年４月１２日

所属・職名：教育文化学部　准教授
氏名：鈴木　正明

派遣期間：２００９年９月９日～２０１０年３月１８日
派遣研究機関名：英文　University of Southern California
　　　　　　　　：和文　南カリフォルニア大学
研究課題：曲面の写像類群の代数的構造に関する研究

○研究概要（２０００字程度）

別紙

○研究期間全般にわたる感想
（写真等があれば添付願います）

期間が短かったのでやっと慣れた頃に帰国となってしまった。

※報告書は，国際交流センター刊行物（Web ｻｲﾄ含む）に公開を予定しております。

（別紙）

研究概要

K を 3 次元球面 S^3 内の結び目とし，G(K)をその結び目群とする。すなわち S^3 から結び目を除いた空間の基本群を G(K)とする。ここでは素な結び目のみを考察する。素な結び目とは自明でない結び目の連結和ではない結び目のことである。この研究において大事な定義として $K \geq K'$ をもし G(K)から G(K′)へ全射準同型が存在するときに表わすことにする。よく知られている事実として，この関係は素な結び目の集合の半順序になる。すなわち $K \geq K'$ であり，$K \geq K'$ かつ $K' \geq K$ ならば K=K であり，$K \geq K'$ かつ $K' \geq K''$ ならば $K \geq K''$ である。最初と三番目の関係は自明であるが，二番目の関係は非自明で，実際重要な定理の組み合わせで証明することができる。まず，結び目群はホピアンである。すなわち自分自身への全射準同型は同型写像である。これは結び目群が有限生成であることと過剰有限であることから示される。またホウィッテンとゴードンールュクの定理を組み合わせると素な結び目群に対しては結び目群が同型であることと結び目が同型であることとは同値であることが分わる。以上の結果より関係が半順序であるための２番目の性質をみたすことが分かり，実際に半順序であることが示される。

では結び目群の間に全射準同型が存在するのはどのようなときであろうか？　任意の結び目群から自明な結び目の結び目群へ必ず全射が存在する。自明な結び目の結び目群は無限巡回群であり，その生成元はメリディアンで取ることができる。言い換えると，この全射はアーベル化によって実現できると解釈できる。次に結び目の連結和を考えるならばその結び目群からそれぞれの結び目の結び目群へ全射が存在する。ただし，これら二つの例はここでは素な結び目を考えているためこれ以降現れない。もう少し本質的な例として結び目の周期がある。周期的な結び目の結び目群はその周期で割った結び目の結び目群に全射が存在する。さらに二つの結び目の補空間の間に写像１の写像が存在するとき結び目群の間には全射が存在する。

堀江ー北野ー松本ー鈴木はこの半順序を交点数 11 以下の素な結び目の集合に対して全て決定した。すなわち全ての二つの結び目の組に対して全射が存在するか否かを決定した。

証明の概略について述べる。まず全射が存在するときについてだが，これはそれぞれの結び目の組に対して，具体的に全射準同型を構成することによって証明をした。このとき，全射は定義域の結び目のメリディアンは値域の結び目のメリディアンに写るような条件で構成することができた。この構成方法は計算機によることで実現された。一旦計算機で見つけることが出来れば，それが本当に群準同型になっているか，また全射写像であるかを確認することは手で計算できる。

次に全射が存在しないことの証明方法について述べる。最初の方法として，古典的によく知られているアレキサンダー多項式を用いる。K を結び目とし $\Delta_K(t)$ を K のアレキサンダー多項式とする。このときよく知られている事実として，$\Delta_K(t)$ が $\Delta_{K'}(t)$ で割り切ることができないとき G(K′)から G(K)へ全射が存在しないことが分かる。これは全射が存在しない十分条件を与えている。実際にこの方法でほとんどの組に対して全射が存在しないことが示される。ただ，それでは全射が存在しないことが証明できない例も存在する。その組に対してはねじれアレキ

サンダー多項式を用いる。ねじれアレキサンダー多項式は約 20 年まえに Lim によって定義され，和田によって本質的な一般化がなされた。この和田による一般化によって多くの例についてねじれアレキサンダー多項式を計算できるようになった。ここでは和田の方法を採用する。ねじれアレキサンダー多項式は 3 つのものによって定義される。まず，有限表示可能な群，そしてその群から自由アーベル群への全射準同型，そして群の線形表現である。ここで表現は一意分解整域上の表現である必要がある。ここでは簡単のために結び目群のねじれアレキサンダー多項式についてのみ考察する。すなわち，有限表示可能な群として結び目群を考える。結び目群は必ず退化数 1 の有限表示が可能である。自由アーベル群への全射として，結び目群のアーベル化を考える。結び目群のアーベル化は常に無限巡回群であり，それはメリディアンによって生成される。また群の表現として結び目群の素体上の 2 次元特殊線型群への表現を考える。体は必ず一意分解整域である。北野－鈴木－和田の結果より，もし結び目群 G(K′)の表現で，結び目群 G(K)の任意の同じ値域を持つ表現に対してねじれアレキサンダー多項式の分子が割りきれないか，分母が同一でなければ G(K)から G(K′)へ全射は存在しないということが示されている。この結果は北野－鈴木－和田の結果の応用のひとつで，これにより結び目群の間に全射が存在しないことの十分条件が得られたことになる。この定理を適用するには，与えられた素数と結び目群に対して，その素体上の 2 次元特殊線形群への表現を全て列挙する必要があるがそれは可能である。なぜなら結び目群は有限生成で素体上の 2 次元特殊線形群の位数も有限である。よってこの表現の個数も有限である。この手法によって全射が存在するか否かを全 63750 通りに関して決定した。
また森田準同型とマグナス表現の特性多項式との関係についても考察した。