

令和 3 年度個別学力検査問題
(国際資源学部, 教育文化学部, 医学部, 理工学部)

数 学

前 期 日 程

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで, この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は, 6 ページあり, 問題は (1) から (8) まで 8 題あります。解答用紙は 4 枚あります。計算用紙(白紙)は 2 枚あります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 受験する学部等により, それぞれ以下の 4 題が出題されます。
国際資源学部は (1), (3), (4), (5)
教育文化学部(理数教育コースを除く)は (1), (2), (3), (4)
教育文化学部(理数教育コース)は (1), (3), (4), (5)
医学部は (5), (6), (7), (8)
理工学部は (1), (3), (4), (5)
をそれぞれ解答しなさい。
- 4 監督者の指示に従って, 解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 5 1 枚の解答用紙に 1 つの問題を解答しなさい。また, 解答用紙の指定された () 内に解答する問題の番号を記入しなさい。
- 6 解答用紙の表に記入しきれない場合は, その裏に記入してもよい。その場合, 解答用紙の表の右下に「裏に記入」と明記しなさい。ただし, 解答用紙の裏の上部(破線の上の部分)には解答を記入してはいけません。
- 7 配付された解答用紙は, 持ち帰ってはいけません。
- 8 試験終了後, 問題冊子および計算用紙は持ち帰りなさい。

(1) 次の問いに答えなさい。

(i) $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ のとき, $x + y$ の値と $x^3 + y^3$ の値を求めなさい。

(ii) 1 から 9 までの番号が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードの中から, 3 枚のカードを同時に引く。このとき, 3 枚のカードの番号の積が 24 以下になる確率を求めなさい。

(iii) 不等式 $x + 4 \leq 4x - 5$ を満たす実数 x の集合を A , 不等式 $|x - 3| < 2$ を満たす実数 x の集合を B とする。また, 定数 a, b に対して 2 次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ を満たす実数 x の集合を X とする。実数全体を全体集合とするとき, $X = \overline{A} \cap B$ となるように a, b の値を定めなさい。

(iv) p を実数とし, $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (p, 2 - p)$ とする。 \vec{a} と \vec{b} のなす角が 45° のとき, p の値を求めなさい。

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 1$ に対し、曲線 $y = f(x)$ 上に点 $A(a, f(a))$ をとる。次の問いに答えなさい。

(i) $a > 0$ とする。点 A と点 $O(0, 0)$ の距離を最小にする a の値と、そのときの距離を求めなさい。

(ii) $a \neq 0$ とする。点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点の x 座標を求めなさい。

(iii) $a = 2$ とする。曲線 $y = f(x)$ 、点 A における接線、および x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

(3) $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c で表し、 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ A , B , C で表す。次の問いに答えなさい。

(i) $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{1}{7}$ であるとき、 $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めなさい。

(ii) $b = 2c$, $\cos A = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin A : \sin B : \sin C$ を求めなさい。

(iii) $b = 6$, $c = 2$ であり、 $6 \cos C - 2 \cos B = a$ が成り立つとき、 B と a の値をそれぞれ求めなさい。

(4) 初項5, 公比3の等比数列 $\{a_n\}$ に対し, 次の問いに答えなさい。ただし,
 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(i) 数列 $\{b_n\}$ を, $b_1 = 2, b_{n+1} - b_n = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)により定める。
数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(ii) $10^2 < a_n < 10^6$ を満たす, すべての自然数 n を求めなさい。

(iii) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $S_n > 10^5$ を満たす,
最小の自然数 n を求めなさい。

(5) 関数 $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ について, 次の問いに答えなさい。

(i) x が実数全体を動くとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めなさい。

(ii) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めなさい。

(iii) a を実数とする。点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とし, l と
直線 $y = 2$ との交点をP, l と直線 $y = -1$ との交点をQとする。このとき,
線分PQの長さが最小となる a の値を求めなさい。

(6) 次の問いに答えなさい。ただし、 i は虚数単位とする。

(i) 複素数 α, β が $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta| = 1$ を満たすとき、 $|\alpha\beta|$ の最大値を求めなさい。

(ii) 複素数 α, β が $\alpha\beta = 1$ を満たすとする。原点を O とする複素数平面上において、 α の表す点を P とし、 β の表す点を Q とする。線分 OP が実軸の正の向きとなす角を θ とし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 $\triangle OPQ$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、 θ の値を求めなさい。

(iii) m, n を $1 \leq m \leq 10, 1 \leq n \leq 10$ を満たす整数とする。

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

となる m, n の組を求めなさい。

(7) 座標空間に4点 $A(1, -2, -2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 3, 2)$, $D(4, -1, 0)$ をとる。点 A, B, C, D, A を順に線分で結んでできる折れ線 $L = ABCDA$ を考える。次の問いに答えなさい。

(i) \overrightarrow{BA} と \overrightarrow{BC} のなす角を α , \overrightarrow{DA} と \overrightarrow{DC} のなす角を β とする。 α と β の大きさを比較しなさい。

(ii) k を定数とする。折れ線 L において y 座標が k 以上である部分を L_1 , y 座標が k 以下である部分を L_2 とする。 L_1 の長さ L_2 の長さが等しくなるように、 k の値を定めなさい。

(iii) 折れ線 L 上を動く点 P が、点 A を出発し、 B, C, D を順に通って A に戻るとする。2点 A, P 間の距離 AP が増加から減少に変わるときの点 P の座標、および AP が減少から増加に変わるときの点 P の座標を求めなさい。

(8) 関数 $f(x) = e^{x^3-x}$ について、次の問いに答えなさい。

(i) k を定数とするとき、関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数を求めなさい。

(ii) 関数 $y = f(x)$ のグラフと $y = e^x$ のグラフとの共有点の座標を求めなさい。

(iii) D を $y = f(x)$ のグラフと $y = e^x$ のグラフで囲まれた部分とする。 m を定数とし、直線 $y = m$ のうち D との共通部分が、線分または互いに交わらない線分の集まりであるとき、それらの線分の長さの合計を、直線 $y = m$ の D 部分の長さとしてよぶ。 $m \neq e^{\frac{1}{3}}$ として、直線 $y = e^{\frac{1}{3}}$ の D 部分の長さと直線 $y = m$ の D 部分の長さが等しくなるように、 m の値を1つ定めなさい。